

## 8.6 Practice Questions: Proofs

### MP (*Modus Ponens*)

1. 1.  $P \rightarrow Q$   
2.  $P$              $\therefore Q$   
3.  $Q$             1, 2, MP

2. 1.  $R \rightarrow S$   
2.  $R$              $\therefore S$   
3.  $S$             1, 2, MP

3. 1.  $P \rightarrow Q$   
2.  $Q \rightarrow R$   
3.  $P$              $\therefore R$   
4.  $Q$             1, 3, MP  
5.  $R$             2, 4, MP

4. 1.  $(P \& Q) \rightarrow R$   
2.  $P \& Q$         $\therefore R$   
3.  $R$

5. 1.  $P \rightarrow (Q \& R)$   
2.  $P$              $\therefore Q \& R$   
3.  $Q \& R$        1, 2, MP

6. 1.  $P \rightarrow (Q \vee R)$   
2.  $P$              $\therefore Q \vee R$   
3.  $Q \vee R$        1, 2, MP

7. 1.  $(P \vee Q) \rightarrow (R \& \neg S)$   
2.  $P \vee Q$         $\therefore (R \& \neg S)$   
3.  $R \& \neg S$      1, 2, MP

8. 1.  $(P \vee Q) \rightarrow (R \ \& \ \neg S)$   
2.  $(R \ \& \ \neg S) \rightarrow \neg(T \vee U)$   
3.  $P \vee Q \quad \therefore \neg(T \vee U)$   
4.  $R \ \& \ \neg S \quad 1, 3, \text{MP}$   
5.  $\neg(T \vee U) \quad 2, 4, \text{MP}$

**MT (*Modus Tollens*)**

9. 1.  $P \rightarrow Q$   
2.  $\neg Q \quad \therefore \neg P$   
3.  $\neg P \quad 1, 2, \text{MT}$

10. 1.  $R \rightarrow S$   
2.  $\neg S \quad \therefore \neg R$   
3.  $\neg R \quad 1, 2, \text{MT}$

11. 1.  $P \rightarrow Q$   
2.  $Q \rightarrow R$   
3.  $\neg R \quad \therefore \neg P$   
4.  $\neg Q \quad 2, 3, \text{MT}$   
5.  $\neg P \quad 1, 4, \text{MT}$

12. 1.  $(P \ \& \ Q) \rightarrow R$   
2.  $\neg R \quad \therefore \neg(P \ \& \ Q)$   
3.  $\neg(P \ \& \ Q) \quad 1, 2, \text{MT}$

13. 1.  $P \rightarrow (Q \ \& \ R)$   
2.  $\neg(Q \ \& \ R) \quad \therefore \neg P$   
3.  $\neg P \quad 1, 2, \text{MT}$

14. 1.  $P \rightarrow (Q \vee R)$   
2.  $\neg(Q \vee R)$   $\therefore \neg P$   
3.  $\neg P$  1, 2, MT

15. 1.  $(P \vee Q) \rightarrow (R \& \neg S)$   
2.  $\neg(R \& \neg S)$   $\therefore \neg(P \vee Q)$   
3.  $\neg(P \vee Q)$  1, 2, MT

### DS (Disjunctive Syllogism)

16. 1.  $P \vee Q$   
2.  $\neg Q$   $\therefore P$   
3.  $P$  1, 2, DS

17. 1.  $P \vee Q$   
2.  $\neg P$   $\therefore Q$   
3.  $Q$  1, 2, DS

18. 1.  $(P \& Q) \vee R$   
2.  $\neg R$   $\therefore (P \& Q)$   
3.  $P \& Q$  1, 2, DS

19. 1.  $(P \& Q) \vee R$   
2.  $\neg(P \& Q)$   $\therefore R$   
3.  $R$  1, 2, DS

20. 1.  $P \vee (Q \& R)$   
2.  $\neg(Q \& R)$   $\therefore P$   
3.  $P$  1, 2, DS

21. 1.  $P \vee (Q \& R)$   
2.  $\neg P$   $\therefore Q \& R$   
3.  $Q \& R$  1, 2, DS

22. 1.  $(P \vee Q) \vee (R \& S)$   
2.  $\neg(P \vee Q) \quad \therefore R \& S$   
3.  $R \& S \quad 1, 2, DS$

23. 1.  $(P \vee Q) \vee (R \& S)$   
2.  $\neg(R \& S) \quad \therefore P \vee Q$   
3.  $P \vee Q \quad 1, 2, DS$

24. 1.  $([A \vee B] \vee C) \vee D$   
2.  $\neg D \quad \therefore (A \vee B) \vee C$   
3.  $(A \vee B) \vee C \quad 1, 2, DS$

25. 1.  $([A \vee B] \vee C) \vee D$   
2.  $\neg D$   
3.  $\neg C \quad \therefore A \vee B$   
4.  $(A \vee B) \vee C \quad 1, 2, DS$   
5.  $A \vee B \quad 3, 4, DS$

26. 1.  $([A \vee B] \vee C) \vee D$   
2.  $\neg D$   
3.  $\neg C$   
4.  $\neg A \quad \therefore B$   
5.  $(A \vee B) \vee C \quad 1, 2, DS$   
6.  $A \vee B \quad 3, 5, DS$   
7.  $B \quad 4, 6, DS$

### HS (Hypothetical Syllogism)

27. 1.  $P \rightarrow Q$   
2.  $Q \rightarrow R \quad \therefore P \rightarrow R$   
3.  $P \rightarrow R \quad 1, 2, HS$

28. 1.  $P \rightarrow Q$   
 2.  $Q \rightarrow R$   
 3.  $R \rightarrow S \quad \therefore P \rightarrow S$   
 4.  $P \rightarrow R \quad 1, 2, HS$   
 5.  $P \rightarrow S \quad 3, 4, HS$
29. 1.  $(P \& Q) \rightarrow R$   
 2.  $R \rightarrow S \quad \therefore (P \& Q) \rightarrow S$   
 3.  $(P \& Q) \rightarrow S \quad 1, 2, HS$
30. 1.  $(P \& Q) \rightarrow (R \vee S)$   
 2.  $(R \vee S) \rightarrow T \quad \therefore (P \& Q) \rightarrow T$   
 3.  $(P \& Q) \rightarrow T \quad 1, 2, HS$
31. 1.  $(P \& Q) \rightarrow R$   
 2.  $R \rightarrow S$   
 3.  $S \rightarrow (T \vee U) \quad \therefore (P \& Q) \rightarrow (T \vee U)$   
 4.  $(P \& Q) \rightarrow S \quad 1, 2, HS$   
 5.  $(P \& Q) \rightarrow (T \vee U) \quad 3, 4, HS$
32. 1.  $(C \vee Q) \rightarrow \neg A$   
 2.  $\neg A \rightarrow (R \& K)$   
 3.  $(R \& K) \rightarrow Y \quad \therefore (C \vee Q) \rightarrow Y$   
 4.  $(C \vee Q) \rightarrow (R \& K) \quad 1, 2, HS$   
 5.  $(C \vee Q) \rightarrow Y \quad 3, 4, HS$

### Add (Addition)

33. 1.  $P \quad \therefore P \vee Q$   
 2.  $P \vee Q \quad 1, Add$
34. 1.  $(P \& Q) \quad \therefore (P \& Q) \vee R$   
 2.  $(P \& Q) \vee R \quad 1, Add$

35. 1.  $(P \vee Q)$   $\therefore (P \vee Q) \vee R$   
2.  $(P \vee Q) \vee R$  1, Add

36. 1.  $\neg P$   $\therefore \neg P \vee Q$   
2.  $\neg P \vee Q$  1, Add

37. 1.  $(P \& \neg Q)$   $\therefore (P \& \neg Q) \vee R$   
2.  $(P \& \neg Q) \vee R$  1, Add

38. 1.  $P$   $\therefore (P \vee Q) \vee R$   
2.  $P \vee Q$  1, Add  
3.  $(P \vee Q) \vee R$  2, Add

### Simp (Simplification)

39. 1.  $P \& Q$   $\therefore P$   
2.  $P$  1, Simp

40. 1.  $P \& Q$   $\therefore Q$   
2.  $Q$  1, Simp

41. 1.  $R \& S$   $\therefore R$   
2.  $R$  1, Simp

42. 1.  $R \& S$   $\therefore S$   
2.  $S$  1, Simp

43. 1.  $(P \& Q) \& R$   $\therefore R$   
2.  $R$  1, Simp

44. 1.  $(P \& Q) \& R$   $\therefore P \& Q$   
2.  $P \& Q$  1, Simp

45. 1.  $(P \& Q) \& (R \& S)$   $\therefore R$   
2.  $R \& S$  1, Simp  
3.  $R$  2, Simp

46. 1.  $(P \& Q) \& (R \vee S)$   
2.  $Q \rightarrow T$   $\therefore R \vee S$   
3.  $R \vee S$  1, Simp

47. 1.  $(P \& Q) \& (R \vee S)$   
2.  $Q \rightarrow T$   $\therefore P$   
3.  $P \& Q$  1, Simp  
4.  $P$  3, Simp

### Conj (Conjunction)

48. 1.  $P$   
2.  $Q$   $\therefore P \& Q$   
3.  $P \& Q$  1, 2, Conj

49. 1.  $P$   
2.  $Q$   $\therefore Q \& P$   
3.  $Q \& P$  1, 2, Conj

50. 1.  $R$   
2.  $S$   $\therefore R \& S$   
3.  $R \& S$  1, 2, Conj

51. 1.  $P \vee Q$   
2.  $T$   $\therefore (P \vee Q) \& T$   
3.  $(P \vee Q) \& T$  1, 2, Conj

52. 1.  $\neg P$   
 2.  $Q \& R$   $\therefore \neg P \& (Q \& R)$   
 3.  $\neg P \& (Q \& R)$  1, 2, Conj

53. 1.  $\neg P$   
 2.  $\neg Q \& R$   $\therefore \neg P \& (\neg Q \& R)$   
 3.  $\neg P \& (\neg Q \& R)$  1, 2, Conj

54. 1.  $\neg P$   
 2.  $\neg(Q \& R)$   $\therefore \neg P \& \neg(Q \& R)$   
 3.  $\neg P \& \neg(Q \& R)$  1, 2, Conj

55. 1.  $P \vee Q$   
 2.  $R \& S$   
 3.  $S \rightarrow T$   $\therefore (P \vee Q) \& [(R \& S) \& (S \rightarrow T)]$   
 4.  $(R \& S) \& (S \rightarrow T)$  2, 3, Conj  
 5.  $(P \vee Q) \& [(R \& S) \& (S \rightarrow T)]$  1, 4, Conj

### CD (Constructive Dilemma)

56. 1.  $(P \rightarrow Q) \& (R \rightarrow S)$   
 2.  $P \vee R$   $\therefore Q \vee S$   
 3.  $Q \vee S$  1, 2, CD

57. 1.  $(Q \rightarrow P) \& (S \rightarrow R)$   
 2.  $Q \vee S$   $\therefore P \vee R$   
 3.  $P \vee R$  1, 2, CD

58. 1.  $([A \& B] \rightarrow Q) \& (R \rightarrow S)$   
 2.  $(A \& B) \vee R$   $\therefore Q \vee S$   
 3.  $Q \vee S$  1, 2, CD



59. 1.  $([A \vee B] \rightarrow Q) \& ([C \& D] \rightarrow S)$   
2.  $(A \vee B) \vee (C \& D) \quad \therefore Q \vee S$   
3.  $Q \vee S \quad 1, 2, CD$

60. 1.  $([(A \vee B) \& C] \rightarrow Q) \& ([D \& E] \rightarrow S)$   
2.  $([A \vee B] \& C) \vee (D \& E) \quad \therefore Q \vee S$   
3.  $Q \vee S \quad 1, 2, CD$

61. 1.  $(P \rightarrow Q) \& (R \rightarrow S)$   
2.  $P \vee R$   
3.  $(Q \rightarrow T) \& (S \rightarrow U) \quad \therefore T \vee U$   
4.  $Q \vee S \quad 1, 2, CD$   
5.  $T \vee U \quad 3, 4, CD$

62. 1.  $([A \leftrightarrow B] \rightarrow Q) \& (R \rightarrow S)$   
2.  $R \vee (A \leftrightarrow B) \quad \therefore Q \vee S$   
3.  $Q \vee S \quad 1, 2, CD$

63. 1.  $([A \leftrightarrow B] \rightarrow Q) \& (R \rightarrow S)$   
2.  $R \vee (A \leftrightarrow B)$   
3.  $(Q \rightarrow T) \& (S \rightarrow U) \quad \therefore T \vee U$   
4.  $Q \vee S \quad 1, 2, CD$   
5.  $T \vee U \quad 3, 4, CD$

64. 1.  $([A \leftrightarrow B] \rightarrow Q) \& (R \rightarrow S)$   
2.  $R \vee (A \leftrightarrow B)$   
3.  $(Q \rightarrow T) \& (S \rightarrow U)$   
4.  $(T \rightarrow W) \& (U \rightarrow [X \& Y]) \quad \therefore W \vee (X \& Y)$   
5.  $Q \vee S \quad 1, 2, CD$   
6.  $T \vee U \quad 3, 4, CD$   
7.  $W \vee (X \& Y) \quad 4, 6, CD$

## Multi-rule Proofs

65. 1.  $P \rightarrow Q$   
2.  $P \vee R$   
3.  $\neg R$              $\therefore Q$   
4.  $P$                 2, 3, DS  
5.  $Q$                 1, 4, MP

66. 1.  $P \& Q$   
2.  $Q \rightarrow R$          $\therefore R$   
3.  $Q$                 1, Simp  
4.  $R$                 2, 3, MP

67. 1.  $P \& \neg Q$   
2.  $R \rightarrow Q$          $\therefore \neg R$   
3.  $\neg Q$               1, Simp  
4.  $\neg R$               2, 3, MT

68. 1.  $P \vee Q$   
2.  $Q \rightarrow R$   
3.  $P \rightarrow (S \vee T)$   
4.  $\neg R$                $\therefore S \vee T$   
5.  $\neg Q$               2, 4, MT  
6.  $P$                 1, 5, DS  
7.  $S \vee T$             3, 6, MP

69. 1.  $P \rightarrow Q$   
2.  $Q \rightarrow (R \vee S)$   
3.  $\neg S \& P$          $\therefore R$   
4.  $P$                 3, Simp  
5.  $Q$                 1, 4, M  
6.  $R \vee S$             2, 5, MP  
7.  $\neg S$               3, Simp  
8.  $R$                 6, 7, DS

70. 1.  $([A \& B] \rightarrow Q) \& ([C \vee D] \rightarrow S)$   
 2.  $A \& B$   
 3.  $C$   $\therefore Q \& S$   
 4.  $(A \& B) \rightarrow Q$  1, Simp  
 5.  $Q$  2, 4, MP  
 6.  $(C \vee D) \rightarrow S$  1, Simp  
 7.  $C \vee D$  3, Add  
 8.  $S$  6, 7, MP  
 9.  $Q \& S$  5, 8, Conj

71. 1.  $(A \rightarrow Q) \& ((C \vee D) \rightarrow E) \rightarrow S)$   
 2.  $A \& B$   
 3.  $D$   $\therefore Q \vee S$   
 4.  $A \rightarrow Q$  1, Simp  
 5.  $A$  2, Simp  
 6.  $Q$  4, 5, MP  
 7.  $Q \vee S$  6, Add

72. 1.  $P \rightarrow Q$   
 2.  $R \rightarrow S$   
 3.  $P$   
 4.  $R$   $\therefore Q \vee S$   
 5.  $(P \rightarrow Q) \& (R \rightarrow S)$  1, 2, Conj  
 6.  $P \vee R$  3, Add  
 7.  $Q \vee S$  5, 6, DS<sup>1</sup>

73. 1.  $P \rightarrow Q$   
 2.  $P$   $\therefore Q \vee R$   
 3.  $Q$  1, 2, MP  
 4.  $Q \vee R$  3, Add

74. 1.  $P \rightarrow (Q \& R)$   
 2.  $P$   $\therefore Q$   
 3.  $Q \& R$  1, 2, MP  
 4.  $Q$  3, Simp

---

<sup>1</sup> There's a much simpler and shorter way to do this one. Do you see it? Similarly for #76.

75. 1.  $P \rightarrow Q$   
2.  $P$   $\therefore P \& Q$   
3.  $Q$  1, 2, MP  
4.  $P \& Q$  2, 3, Conj

76. 1.  $P \rightarrow Q$   
2.  $R \rightarrow S$   
3.  $P$   $\therefore Q \vee S$   
4.  $(P \rightarrow Q) \& (R \rightarrow S)$  1, 2, Conj  
5.  $P \vee R$  3, Add  
6.  $Q \vee S$  4, 5, CD