

## 9.4 Practice Questions: Advanced Proof Techniques

### Conditional Proof

1.  $1. P \rightarrow \neg Q$   
 $2. Q \vee R \quad \therefore P \rightarrow R$   
    |  $3. P$  CPA  
    |  $4. \neg Q$  1, 3 MP  
    |  $5. R$  2, 4 DS  
 $6. P \rightarrow R$  3-5 CP
2.  $1. (P \vee Q) \rightarrow \neg R$   
 $2. R \vee \neg S \quad \therefore (P \vee Q) \rightarrow \neg S$   
    |  $3. P \vee Q$  CPA  
    |  $4. \neg R$  1, 3 MP  
    |  $5. \neg S$  2, 4 DS  
 $6. (P \vee Q) \rightarrow \neg S$  3-5 CP
3.  $1. P \rightarrow (Q \& R)$   
 $2. R \rightarrow T \quad \therefore P \rightarrow T$   
    |  $3. P$  CPA  
    |  $4. Q \& R$  1, 3 MP  
    |  $5. R$  4, Simp  
    |  $6. T$  2, 5 MP  
 $7. P \rightarrow T$  3-6 CP
4.  $1. P \rightarrow Q$   
 $2. R \rightarrow S \quad \therefore (P \vee R) \rightarrow (Q \vee S)$   
    |  $3. P \vee R$  CPA  
    |  $4. (P \rightarrow Q) \& (R \rightarrow S)$  1, 2, Conj  
    |  $5. Q \vee S$  3, 4, CD  
 $6. (P \vee R) \rightarrow (Q \vee S)$  3-5 CP

5. 1.  $Q \rightarrow R$   
 2.  $R \rightarrow S$   $\therefore (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow S)$   
    | 3.  $P \rightarrow Q$  CPA  
    | 4.  $P \rightarrow R$  1, 3, HS  
    | 5.  $P \rightarrow S$  2, 4, HS  
 6.  $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow S)$  3-5, CP

6. 1.  $P \rightarrow \neg Q$   
 2.  $R \vee S$   
 3.  $S \rightarrow Q$   $\therefore P \rightarrow R$   
    | 4.  $P$  CPA  
    | 5.  $\neg Q$  1, 3, MP  
    | 6.  $\neg S$  3, 5, MT  
    | 7.  $R$  2, 6, DS  
 8.  $P \rightarrow R$  4-7, CP

7. 1.  $P \rightarrow \neg Q$   
 2.  $Q \vee R$   $\therefore P \rightarrow (\neg Q \& R)$   
    | 3.  $P$  CPA  
    | 4.  $\neg Q$  1, 3 MP  
    | 5.  $R$  2, 4 DS  
 6.  $P \rightarrow R$  3-5 CP  
    | 7.  $P$  CPA  
    | 8.  $\neg Q$  1, 7, MP  
    | 9.  $R$  6, 7, MP  
    | 10.  $\neg Q \& R$  8, 9, Conj  
 11.  $P \rightarrow (\neg Q \& R)$  7-10, CP

### Indirect Proof

8. 1.  $P \rightarrow Q$   
 2.  $Q \rightarrow \neg P$   $\therefore \neg P$   
    | 3.  $P$  IPA  
    | 4.  $Q$  1, 3, MP  
    | 5.  $\neg P$  2, 4, MP  
    | 6.  $P \& \neg P$  3, 6, Conj  
 7.  $\neg P$  3-6 IP

9. 1.  $P \vee Q$   
 2.  $Q \rightarrow P$              $\therefore P$   
    | 3.  $\neg P$             IPA  
    | 4.  $Q$             1, 3, DS  
    | 5.  $P$             2, 4, MP  
    | 6.  $P \& \neg P$     3, 6, Conj  
 7.  $P$             3-6 IP

10. 1.  $\neg(R \vee S)$   
 2.  $P \rightarrow R$   
 3.  $Q \rightarrow S$              $\therefore \neg(P \vee Q)$   
    | 3.  $P \vee Q$             IPA  
    | 4.  $(P \rightarrow R) \& (Q \rightarrow S)$     2, 3, Conj  
    | 5.  $R \vee S$             3, 4, CD  
    | 6.  $(R \vee S) \& \neg(R \vee S)$     1, 5, Conj  
 7.  $\neg(P \vee Q)$             3-6 IP

11. 1.  $(P \vee Q) \rightarrow \neg P$      $\therefore \neg P$   
    | 2.  $P$             IPA  
    | 3.  $P \vee Q$         2, Add  
    | 4.  $\neg P$             1, 3, MP  
    | 5.  $P \& \neg P$        2, 4, Conj  
 6.  $\neg P$             2-5 IP

12. 1.  $P \rightarrow (Q \& \neg Q)$      $\therefore \neg P$   
    | 2.  $P$             IPA  
    | 3.  $Q \& \neg Q$        1, 2, MP  
 4.  $\neg P$             2-3, IP

13. 1. $P \rightarrow Q$		
2. $Q \rightarrow R \vee S$		
3. $Q \rightarrow \neg R$		$\therefore P \rightarrow S$
4. P		CPA
5. Q		1, 4, MP
6. Q		CPA
7. $R \vee S$		2, 6, MP
8. $\neg R$		3, 6, MP
9. S		7, 8, DS
10. $Q \rightarrow S$		6-9, CP
11. S		
12. $P \rightarrow S$		4-11, CP

14. 1. $Q \rightarrow \neg R$		
2. $R \vee (P \vee S)$		
3. $\neg P \vee \neg Q$		$\therefore Q \rightarrow S$
4. Q		CPA
5. $\neg R$		1, 4, MP
6. $P \vee S$		2, 5, DS
7. P	IPA	
8. $\neg Q$	3, 7, DS	
9. $Q \& \neg Q$	4, 8, Conj	
10. $\neg P$	7-9, IP	
11. S	6, 10, DS	
12. $Q \rightarrow S$	4-11, CP	